第 2 节 奇偶数列问题—综合篇（★★★★）

内容提要

高考中常见的需分奇偶讨论的情形有下面几种：

1．递推式分奇偶：n 为奇数和 n 为偶数时的递推公式不同，此时一般需通过分奇偶讨论来分析数列 $\{a_n\}$.

2．递推式为 a_{n+2} 和 a_n 的关系：此为隔项递推，它反映的是相邻的奇数项，或相邻的偶数项之间的关系，在分析这种递推式时，往往也需分奇偶讨论. 有的题给的虽是 a_{n+1} 和 a_n 之间的递推式，但直接分析不易，要化为 a_{n+2} 和 a_n 的递推式来处理. 如本节例 2 的变式.

注意：分奇偶讨论时，下标变换是常用操作，$\{a_n\}$ 的奇数项构成的数列可表示为 $\{a_{2k-1}\}$，偶数项构成的数列为 $\{a_{2k}\}$，将 a_n 看成定义在 $\mathbf{N}^*$ 上的函数，记作 $a_n=f(n)$，则 $a_{2k-1}=f(2k-1)$，$a_{2k}=f(2k)$. 而对于已知 a_{2k-1} 和 a_{2k} 求 a_n 的问题，本质上就是已知 $f(2k-1)$ 和 $f(2k)$ 求 $f(n)$，可用换元法，分别令 $2k-1$ 和 $2k$ 等于 n，便可求得各自的 $f(n)$，即 a_n.

典型例题

类型Ⅰ：递推式分奇偶

【例 1】（2021·新高考Ⅰ卷）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1, n\text{为奇数}\\ a_n+2, n\text{为偶数}\end{cases}$.

（1）记 $b_n=a_{2n}$，写出 b_1，b_2，并求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）求 $\{a_n\}$ 的前 20 项和.

解法 1：（1）（b_1，b_2 即为 a_2，a_4，要求它们，可按递推公式逐项计算）

由题意，$a_1=1$，$a_2=a_1+1=2$，$a_3=a_2+2=4$，$a_4=a_3+1=5$，

因为 $b_n=a_{2n}$，所以 $b_1=a_2=2$，$b_2=a_4=5$；

（数列 $\{b_n\}$ 即为 $\{a_n\}$ 中的偶数项，先分析其规律，把 $\{a_n\}$ 再算两项，$a_5=a_4+2=7$，$a_6=a_5+1=8$，观察发现 a_2，a_4，a_6 成等差数列，于是猜想 $\{b_n\}$ 为等差数列，故计算 $b_{n+1}-b_n$，看是否为常数）

由所给递推公式可得 $b_{n+1}-b_n=a_{2n+2}-a_{2n}=a_{2n+1}+1-a_{2n}=a_{2n}+2+1-a_{2n}=3$，

所以 $\{b_n\}$ 是公差为 3 的等差数列，故 $b_n=2+(n-1)\times 3=3n-1$.

（2）（观察发现 a_1，a_3，a_5 成等差数列，故猜想 $\{a_n\}$ 的奇数项为等差数列，下面给出严格的判断）

设 $c_n=a_{2n-1}$，则 $c_{n+1}-c_n=a_{2n+1}-a_{2n-1}=a_{2n}+2-a_{2n-1}=a_{2n-1}+1+2-a_{2n-1}=3$，

所以 $\{c_n\}$ 为等差数列，故 $c_n=c_1+(n-1)\times 3=a_1+(n-1)\times 3=1+3n-3=3n-2$，

（奇数项、偶数项的规律都找到了，求前 20 项和可按奇偶项分组）

所以 $\{a_n\}$ 的前 20 项和 $a_1+a_2+\cdots+a_{20}=(a_1+a_3+\cdots+a_{19})+(a_2+a_4+\cdots+a_{20})$

$$=(c_1+c_2+\cdots+c_{10})+(b_1+b_2+\cdots+b_{10})=\frac{10\times(1+28)}{2}+\frac{10\times(2+29)}{2}=300.$$

解法 2：（1）（解法 1 采用的是“观察，归纳，猜想，证明”的方法来分析 $\{a_n\}$ 奇偶项各自的规律，其实也可直接由所给递推公式来分析）

由题意，$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1,n\text{为奇数}\\a_n+2,n\text{为偶数}\end{cases}$，所以 $a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1,n=2k-1\\a_n+2,n=2k\end{cases}$，其中 $k\in\mathbf{N}^*$，

（接下来把 $n=2k-1$ 和 $n=2k$ 分别代入上述递推公式加以分析）所以 $\begin{cases}a_{2k}=a_{2k-1}+1 & ①\\a_{2k+1}=a_{2k}+2 & ②\end{cases}$，

（观察发现只要消去 a_{2k}，就能得到 a_{2k+1} 和 a_{2k-1} 的关系，$\{a_n\}$ 中奇数项的规律就出来了）

把①代入②消去 a_{2k} 可得 $a_{2k+1}=a_{2k-1}+1+2=a_{2k-1}+3$，所以 $a_{2k+1}-a_{2k-1}=3$，

故数列 $\{a_n\}$ 的奇数项构成的数列 $\{a_{2k-1}\}$ 是公差为 3 的等差数列，

（下面求奇数项的通项 a_{2k-1}，得先搞清楚它是奇数项中的第几项，可以这么来看，由于 $a_1,a_2,\cdots,a_{2k}$ 共有 $2k$ 项，其中奇数项占一半，所以最后一个奇数项 a_{2k-1} 是奇数项的第 k 项）

又 $a_1=1$，所以 $a_{2k-1}=a_1+(k-1)\times3=3k-2$，代入①得：$a_{2k}=a_{2k-1}+1=3k-1$，

因为 $b_n=a_{2n}$，所以 $b_1=a_2=2$，$b_2=a_4=5$，$b_n=a_{2n}=3n-1$.

（2）同解法 1，但需注意按此解法，第 1 问已经得到了奇数项为等差数列，故第 2 问直接求和即可.

【反思】遇到像本题所给这类分奇偶的递推式，可先把 $n=2k-1$ 和 $n=2k$ 分别代入，将下标变换成 k，建立 a_{2k+1}，a_{2k}，a_{2k-1} 的关系式，消去偶数项 a_{2k} 即可找到奇数项的关系.

【变式】已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1,n=2k-1\\2a_n,n=2k\end{cases}$，其中 $k\in\mathbf{N}^*$.

（1）设 $b_k=a_{2k-1}$，证明：数列 $\{b_k+2\}$ 为等比数列，并求 a_n.

（2）求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.

解：（1）（本题较难，但思路类似上题，先把 n 换成 k）因为 $a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1,n=2k-1\\2a_n,n=2k\end{cases}$，故 $\begin{cases}a_{2k}=a_{2k-1}+1 & ①\\a_{2k+1}=2a_{2k} & ②\end{cases}$，

（注意到 $\{b_k\}$ 即为 $\{a_n\}$ 中的奇数项，故消去 a_{2k}，找到 a_{2k+1} 和 a_{2k-1} 的关系加以分析）

将①代入②可得：$a_{2k+1}=2(a_{2k-1}+1)=2a_{2k-1}+2$ ③，

（要证 $\{b_k+2\}$ 为等比数列，只需证 $\dfrac{a_{2k+1}+2}{a_{2k-1}+2}$ 为常数，故先由式③凑出 $a_{2k+1}+2$ 和 $a_{2k-1}+2$）

在式③两端同时加 2 得：$a_{2k+1}+2=2a_{2k-1}+2+2=2(a_{2k-1}+2)$，即 $b_{k+1}+2=2(b_k+2)$，

又 $b_1+2=a_1+2=3\neq0$，所以 $\{b_k+2\}$ 所有项都不为 0，从而 $\dfrac{b_{k+1}+2}{b_k+2}=2$，故 $\{b_k+2\}$ 是公比为 2 的等比数列，

所以 $b_k+2=3\times2^{k-1}$，即 $a_{2k-1}+2=3\times2^{k-1}$，故 $a_{2k-1}=3\times2^{k-1}-2$，代入①得：$a_{2k}=3\times2^{k-1}-2+1=3\times2^{k-1}-1$，

（还需将求得的 a_{2k-1} 和 a_{2k} 化为 a_n，直接将下标代换成 n 即可）

在 $a_{2k-1}=3\times2^{k-1}-2$ 中令 $n=2k-1$，则 $k=\dfrac{n+1}{2}$，所以 $a_n=3\times2^{\frac{n+1}{2}-1}-2=3\times2^{\frac{n-1}{2}}-2(n\text{为奇数})$；

在 $a_{2k}=3\times2^{k-1}-1$ 中令 $n=2k$，则 $k=\dfrac{n}{2}$，所以 $a_n=3\times2^{\frac{n}{2}-1}-1(n\text{为偶数})$；

综上所述，$a_n=\begin{cases}3\times 2^{\frac{n-1}{2}}-2,n为奇数\\3\times 2^{\frac{n}{2}-1}-1,n为偶数\end{cases}$.

（2）（数列$\{a_n\}$的通项按奇偶分段，故求和时也按奇偶项分组求和，先考虑n为偶数的简单情形）

当n为偶数时，设$n=2k$，则$k=\dfrac{n}{2}$，$S_n=S_{2k}=(a_1+a_3+\cdots+a_{2k-1})+(a_2+a_4+\cdots+a_{2k})$

$=(3\times 2^0-2+3\times 2^1-2+\cdots+3\times 2^{k-1}-2)+(3\times 2^0-1+3\times 2^1-1+\cdots+3\times 2^{k-1}-1)$

$=2(3\times 2^0+3\times 2^1+\cdots+3\times 2^{k-1})-3k=2\times\dfrac{3(1-2^k)}{1-2}-3k=6(2^k-1)-3k=6(2^{\frac{n}{2}}-1)-\dfrac{3n}{2}$；

（对于n为奇数的情形，无需重复计算，可添一项凑成偶数项，再把添的项减去）

当n为奇数时，$n+1$为偶数，所以$S_n=S_{n+1}-a_{n+1}=6(2^{\frac{n+1}{2}}-1)-\dfrac{3(n+1)}{2}-(3\times 2^{\frac{n+1}{2}-1}-1)$

$=6\times 2^{\frac{n+1}{2}}-6-\dfrac{3n}{2}-\dfrac{3}{2}-3\times 2^{\frac{n-1}{2}}+1=12\times 2^{\frac{n-1}{2}}-\dfrac{3n}{2}-3\times 2^{\frac{n-1}{2}}-\dfrac{13}{2}=9\times 2^{\frac{n-1}{2}}-\dfrac{3n+13}{2}$；

综上所述，$S_n=\begin{cases}6(2^{\frac{n}{2}}-1)-\dfrac{3n}{2},n为偶数\\9\times 2^{\frac{n-1}{2}}-\dfrac{3n+13}{2},n为奇数\end{cases}$.

【反思】求得a_{2k-1}和a_{2k}后，还原成a_n的方法是直接把下标$2k-1$和$2k$代换成n.

类型Ⅱ：递推式为a_{n+2}和a_n的关系

【例 2】已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_2=-1$，且$a_{n+2}-a_n=2(n\in\mathbf{N}^*)$，则$a_n=$______.

解析：若看不懂$a_{n+2}-a_n=2$，可取一些值代进去观察，$\begin{cases}a_3-a_1=2,a_5-a_3=2,a_7-a_5=2,\cdots\\a_4-a_2=2,a_6-a_4=2,a_8-a_6=2,\cdots\end{cases}$，我们发现$\{a_n\}$的奇数项、偶数项分别构成公差为 2 的等差数列，故求a_n应分奇偶讨论，

当n为奇数时，设$n=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$，则$k=\dfrac{n+1}{2}$，所以$a_n=a_{2k-1}=a_1+(k-1)\cdot 2=2k-1=2\cdot\dfrac{n+1}{2}-1=n$；

当n为偶数时，设$n=2k$，则$k=\dfrac{n}{2}$，所以$a_n=a_{2k}=a_2+(k-1)\cdot 2=2k-3=2\cdot\dfrac{n}{2}-3=n-3$；

综上所述，$a_n=\begin{cases}n,n为奇数\\n-3,n为偶数\end{cases}$.

答案：$\begin{cases}n,n为奇数\\n-3,n为偶数\end{cases}$

【反思】若$\{a_n\}$满足$a_{n+2}-a_n=d$，则$\{a_n\}$的奇数项、偶数项各自构成公差为 d 的等差数列，所以遇到这类递推式，应分奇偶讨论求通项公式.

【变式】已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，且$a_na_{n+1}=2^{2n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$，求$\{a_n\}$的通项公式.

解：（对于这种相邻项相乘的形式，常进n相除，化为类似等比数列的递推结构）

因为 $a_n a_{n+1}=2^{2n+1}$，所以 $a_{n+1}a_{n+2}=2^{2(n+1)+1}=2^{2n+3}$，两式相除得：$\dfrac{a_{n+1}a_{n+2}}{a_n a_{n+1}}=\dfrac{2^{2n+3}}{2^{2n+1}}$，故 $\dfrac{a_{n+2}}{a_n}=4$，

（若看不懂 $\dfrac{a_{n+2}}{a_n}=4$，可取一些值代进去看看，$\begin{cases}\dfrac{a_3}{a_1}=4,\dfrac{a_5}{a_3}=4,\dfrac{a_7}{a_5}=4,\cdots\\ \dfrac{a_4}{a_2}=4,\dfrac{a_6}{a_4}=4,\dfrac{a_8}{a_6}=4,\cdots\end{cases}$，

于是 $\{a_n\}$ 的奇数项、偶数项分别构成公比为 4 的等比数列，故应分奇偶分别求通项）

当 n 为奇数时，设 $n=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$，则 $k=\dfrac{n+1}{2}$，$a_n=a_{2k-1}=a_1\cdot 4^{k-1}=2\times 4^{k-1}=2^{2k-1}=2^{2\cdot\frac{n+1}{2}-1}=2^n$；

当 n 为偶数时，设 $n=2k$，则 $k=\dfrac{n}{2}$，$a_n=a_{2k}=a_2\cdot 4^{k-1}$ ①，

在 $a_n a_{n+1}=2^{2n+1}$ 中取 $n=1$ 得 $a_1a_2=2^3=8$，故 $a_2=\dfrac{8}{a_1}=4$，代入①得：$a_n=4\times 4^{k-1}=4^k=4^{\frac{n}{2}}=2^n$；

综上所述，$\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n=2^n$.

【反思】像 $a_n a_{n+1}=f(n)$ 这种递推公式，可进 n 得到 $a_{n+1}a_{n+2}=f(n+1)$，两式相除得 $\dfrac{a_{n+2}}{a_n}=\dfrac{f(n+1)}{f(n)}$，从而分奇偶讨论.

强化训练

1.（2023 •全国模拟 •★★）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\begin{cases}2a_n,n\text{为奇数}\\ a_n+1,n\text{为偶数}\end{cases}$，若 $3\le a_5\le 15$，则 a_1 的取值范围是_____.

2.（2022 • 威海模拟 • ★★★）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1,n=2k-1\\ a_n,n=2k\end{cases}$，其中 $k\in\mathbf{N}^*$.

（1）求 a_2，a_5 的值；

（2）求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

3.（2023 • 保定模拟 • ★★★★）已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_1=2$，$a_{n+1}a_n=4S_n$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若 $b_n=a_n\cdot 2^{a_n}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

4．（2023 • 全国模拟 • ★★★★）已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=pa_n(p\neq 1)$，且a_2+a_3，a_3+a_4，a_4+a_5成等差数列.

（1）求p的值和$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$b_n=\begin{cases}a_n^2,n为奇数\\ \log_2 a_n,n为偶数\end{cases}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$S_n$.

5.（2023 •江西模拟 •★★★★）设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$a_1=1$，$a_2=2$，且$a_{n+2}=3S_n-S_{n+1}+3(n\in\mathbf{N}^*)$.

（1）证明：$a_{n+2}=3a_n$；

（2）求数列$\{a_n\}$的通项公式.